

Ing. Jan MAREK, CSc.

a Ing. Ondřej MAREK, Ph.D.

# MODÁLNÍ ANALÝZA PODDAJNÝCH SOUSTAV S TLUMENÍM

---

kontakt, viz: [www.stat-dyn.pageride.cz](http://www.stat-dyn.pageride.cz)

recenzent: prof. Ing. Vladimír Zeman, DrSc., ZČU v Plzni

## ANOTACE:

V této monografii se autoři zabývají teorií a metodikou výpočtů vlastních hodnot mechanických, či elektro-hydro-mechanických systémů se všemi základními charakterystickými tlumeními:

- konstantním hysterézním ( třecím ),
- lineárním hysterézním,
- lineárním viskózním a jejich kombinacemi.

Jde možná o výklad nikoli běžný, který se nevyhne polemice.

Maticový počet užívaný k popisu problematiky a k řešení patří do vyšší matematiky. Proto je na začátku uveden výběr potřebných tvrzení, či vět. Navazující text na nich staví. Dalším nezbytným matematickým základem jsou komplexní čísla, která strojaři nemívají úplně zažitá. Teorie je vysvětlována s důrazem na obecné pojetí problematiky neproporcionálně tlumených soustav, jednodušší řešení některých speciálních případů jsou pouze krátce zmíněna.

Metodiku numerických výpočtů vlastních hodnot nelze jen tak pominout, neboť metody výpočtu jsou téměř vždy iterační. Bez metod, bez znalosti podmínek a rychlosti jejich konvergence modální analýzu tlumených systémů není možno řešit. Na metodiku výpočtů úzce navazuje programování, a to bez vývojových diagramů. Snahou autorů bylo ukázat úsporné ukládání dat v počítači a postupy výpočtů velkých modelů, jakož i ověřit si správnost uváděných vzorců.

Teorie a postupy řešení jsou demonstrovány na řešených příkladech. Na menší učebnicové navazují i větší aplikace použití modální analýzy pohonů a konstrukcí. Vesměs vycházejí z praxe v oboru stavby velkostí, nicméně všechna odvození a strategie výpočtů platí obecně, na velikosti strojů nezáleží.

V textu lze najít i časté tlumící prvky a jejich většinou nelineární charakteristiky. Zdůrazňuje se v něm, že modální analýzu lze provádět jen v malém linearizovaném okolí pracovního bodu.

Autoři doufají, že důraz, který kladli na praktickou stránku řešení modální analýzy systémů s převážně neproporcionálním tlumením, bude přínosem zejména pro inženýry.

Napsáno v Uničově a v Liberci 2018

z podnětů prof. Ing. Karla Juliše, DrSc., † VII.2019, a mladšího z autorů této monografie, vzešlých trochu bezděčně při diskuzích nad poměrně jednoduchými příklady neproporcionálně tlumených soustav – např. nad úlohou o cirkulárce.

Prof. Juliš zvládal být ředitelem Běchovického SVÚSS a zároveň skvělým učitelem na ČVUT. Významně přispěl k teorii mechaniky. Přímo pověstná byla jeho praktická schopnost i bez velkých výpočtů odhalit příčinu vibrací strojů či zařízení různých druhů a velikostí. A schopnost jednat s lidmi.

Zde je vhodné připomenout i jména dalších českých vědců v oboru mechaniky, alespoň těch, kteří už nežijí. Starší z autorů z nich osobně poznal akademika Jaroslava Kožešníka, dále doc. Ing. Otakara Daňka, DrSc. a doc. RNDr. Vladimíra Bráta, CSc., kteří se zasloužili o rozvoj maticových metod v mechanice. Další význační čeští vědci – mechanici jsou uvedeni zejména v Lit 1. Jména Tondl, Půst, Brepta, Höschl a mnohá další k mechanice neodmyslitelně patří. A jim všem patří náš dík.

## Obsah

1	ÚVOD.....	4
1.1	ZNAČENÍ KONSTANT A PROMĚNNÝCH .....	6
1.2	VÝBĚR VĚT Z MATICOVÉHO POČTU.....	7
1.3	MODÁLNÍ ANALÝZA NETLUMENÉHO SYSTÉMU .....	9
2	NĚCO O TLUMENÍ.....	10
2.1.1	TLUMENÍ LINEÁRNÍ VISKÓZNÍ.....	10
2.1.2	TLUMENÍ TŘECÍ ( SUCHÉ ) .....	10
2.1.3	TLUMENÍ LINEÁRNÍ HYSTEREZNÍ ( TLH ).....	11
2.1.4	TLUMENÍ VNITŘNÍ MATERIÁLOVÉ .....	12
2.2	VYBRANÉ TLUMÍCÍ PRVKY .....	13
2.2.1	TŘECÍ SPOJKA.....	13
2.2.2	ASYNCHRONNÍ ELEKTROMOTOR .....	13
2.2.3	ŘEMENOVÝ PŘEVOD .....	13
2.2.4	HYDRODYNAMICKÁ SPOJKA .....	14
2.2.5	HYDRODYNAMICKÝ MĚNIČ.....	14
2.2.6	PŘÍMOČARÝ TLUMIČ.....	15
2.3	IDENTIFIKACE TLUMENÍ .....	16
2.3.1	METODA OBÁLEK REZONANČNÍCH AMPLITUD .....	16
3	MODÁLNÍ ANALÝZA TLUMENÝCH SYSTÉMŮ .....	18
3.1.1	M.A. SYSTÉMŮ S TLUMENÍM LINEÁRNÍM VISKÓZNÍM.....	19
3.1.2	M.A. pro TLUMENÍ LINEÁRNÍ HYSTEREZNÍ ( TLH ) .....	20
3.1.3	M.A. pro TLUMENÍ KONSTANTNÍ HYSTEREZNÍ ( TŘECÍ ).....	20
3.1.4	M.A. pro MIX KONSTANTNÍHO A LINEÁRNÍHO HYSTEREZNÍHO TLUMENÍ.....	25
3.1.5	M.A. pro MIX VISKÓZNÍHO A KONSTANTNÍHO HYSTEREZNÍHO TLUMENÍ .....	26
4	NUMERICKÉ METODY.....	27
4.1	METODA KONEČNÝCH PRVKŮ ( MKP ).....	27
4.1.1	STATICÁ REDUKCE.....	34
4.1.2	VLIV PŘEDPĚTÍ.....	34
4.2	NUMERICKÉ METODY VÝPOČTU VLASTNÍCH HODNOT .....	40
4.2.1	METODA TŘÍDIAGONALIZACE.....	41
	• QD .....	41
	• QR .....	41
4.2.2	METODA SIMULTÁNNÍCH ITERACÍ ( SI ).....	62
4.2.3	METODA L+SI.....	65
4.2.4	METODA SIVIB .....	65
5	APLIKACE M.A. PŘI STAVBĚ KONSTRUKCÍ A STROJŮ .....	68
5.1	KOLESOVÁ RÝPADLA A NAKLADAČE .....	68
5.1.1	DIMENZOVÁNÍ $K_{\alpha R}$ – DYNAMICKÉ SOUČINITELE.....	69
5.1.2	LADĚNÍ KOLESOVÝCH RÝPADEL .....	72
6	SEZNAMY .....	75
6.1	POUŽITÁ LITERATURA.....	75
6.2	SEZNAM OBRÁZKŮ .....	76
6.3	REJSTŘÍK POJMŮ.....	77

# 1 ÚVOD

Že Země není placatá, věděl už Koperník a mořeplavci dávno před ním. Od dob astronoma Keplera je známo, že makrosvět není lineární. Lze předpokládat, že ani náš pozemský svět se, přísně vzato, lineárními zákony asi neřídí. Přesto v technických výpočtech v rámci rozměrů používaných v pozemním stavitelství nebo strojařině bývá Země automaticky považovaná za placatou, zemské tíhové pole za konstantní a používán lineární matematický aparát. To proto, že analýza lineární soustavy je snadnější a odchylka výsledků v rámci našich pozemských rozměrů, jak lze doufat, nebývá podstatná. I když vyjímečně podstatná je, je běžné soustavu aspoň linearizovat v rámci malých pohybů. Příklady lze najít v letu raket, v hlubokých jámách ... Plyne z nich poučení, že lineární prostředí je užitečná, někdy ale nepoužitelná fikce.

I v následujícím textu je s technickou samozřejmostí předpokládán systém lineární nebo aspoň linearizovaný, nerotující, bez vlivu hydro- nebo aerodynamických sil, většinou mechanický nebo elektro-hydro-mechanický, který vede na zápis rovnic pomocí matic s konstantními koeficienty. Matice jsou lineární operátory. Velmi dobře jimi lze popsat zobecněné tenzory, zobecněné vektory i transformace souřadnic. A nejvíc ze všech možných zápisů se blíží k algoritmicke řešení numerického řešení úloh na počítači. To je veledůležitá vlastnost. Předpokládá se znalost maticového počtu aspoň v rozsahu úvodní kapitoly Lit 4 a základů metody konečných prvků.

Tlumení soustav může být viskózní nebo hysterézní, proporcionalní nebo neproporcionalní. Viskózní malé proporcionalní tlumení bývá zmíněno v mnohých publikacích o dynamice. Modální analýzu takové úlohy lze zvládnout v oboru reálných čísel a s relativně jednoduchými matematickými nástroji. Tlumení neproporcionalní vede nutně k řešení v oboru komplexních čísel. Matice mohou být dvojnásobně velké, více obsazené. Matematický aparát je pak o něco složitější, ale pořád lineární. Jenže silné tlumení lineární nebývá – ani viskózní, ani hysterézní.

Tlumící síly jsou obecně nelineární funkcí  $F_T = F_T(\text{konst.}, x, \dot{x})$ . Linearizace takové funkce se všude jinde provádí ve smyslu Taylorova rozvoje, tzn. že zůstane člen konstantní a dva lineární. Jenže v klasické modální analýze bývá člen konstantního, t.j. třetího, tlumení běžně zanedbáván a berou se do úvahy jenom jejich lineární části. To je důvod, proč se autoři v této publikaci třetímu tlumení mechanických systémů věnují poněkud více a podrobněji, než bývá běžné, a zahrnuli ho do modální analýzy jako její nezbytnou část.

Modální analýzu silně nebo neproporcionalně tlumených soustav bez numerických výpočtů řešit skoro nelze. Numerické metody nebývají finitní, nýbrž iterační, řešitel se v nich musí aspoň trochu orientovat. Je žádoucí, aby i používaný programovací jazyk zvládal operace a funkce s poli čísel včetně polí čísel komplexních, neboť neproporcionalní tlumení vede vždy k řešení v oboru komplexních čísel, i když v případě třetího tlumení možná trochu neobvykle. Speciálně pro technické úlohy s maticemi a poli čísel byl vyvinut Fortran ve verzi 90 a vyšší (zkráceně Fortran>88), popřípadě HP Basic (též HT Basic). Práce s poli čísel zjednodušuje programování a zrychluje výsledný strojový kód. Jsou i vyšší jazyky nebo rovnou řešící programy, ale nebylo žádoucí je používat, aby náš učební text nesklouzl k testování cizího programu, což je vždycky „black box“, namísto toho, aby popisoval skutečné děje v mechanických systémech a v numerice. Následující odstavce proto jsou občas prokládány řešeními příklady a fortranskými texty řešících subroutin, které jsme k řešení použili.

Matice uvažované v této publikaci jsou převážně symetrické. Bylo by zbytečné plýtvat pamětí počítače na obě její poloviny a na nuly, které se vyskytují vně tzv. „obrysu“ matice. Proto je využíván zápis symetrické nebo dolní trojúhelníkové matice pomocí řady čísel<sup>1</sup>, přičemž skutečná délka každého řádku od prvního nenulového až do diagonálního prvku včetně (proměnná šířka obrysu) je uložena do pomocného pole čísel typu INTEGER\*2.

<sup>1</sup>) Tento způsob ukládání matic je vhodný i pro hodně velké řady matic ( $n \approx 1E5$ ) s poměrně úzkým obrysem, které vznikají při úlohách řešených pomocí metody konečných prvků (MKP).