První vlastní tvar kmitu netlumeného systému lze uhodnout stejně jako v předcházejícím příkladu. Druhý lze vypočítat z podmínky nulového momentu hybnosti celého systému, rovnající se podmínce **M**-ortogonality. Takže vlastní frekvence a reálné složky vlastních tvarů jsou :

```
Vlastní frekvence Ω
      0          ±√(400/3) = ±11.547

Vlastní tvary Re
      1              1
      1            -1/3
```

Tlumení je jenom vnější, proto v matici **H** bude obsazen jenom prvek H(2, 2) číslem 0,1π a vzhledem k tomu, že $\Omega_1 = 0$, budou vektory třecích sil $\mathbf{h}_1 = {}^T[\ 0\ ;\ 0{,}1\pi\ ]$ a $\mathbf{h}_2 = {}^T[\ 0\ ;\ -0{,}4\ ]$.

Za předpokladu, že systém se pohybuje počáteční rychlostí $\mathbf{u}_0 = \mathbf{v}_1 * 1$ [1/s], má v sobě akumulovanou poč. energii $\frac{1}{2}\,{}^T\mathbf{u}_0\mathbf{M}\mathbf{u}_0$. Ubývá-li rychlost lineárně do nuly, střední třecí brzdný výkon je $\frac{1}{2}\,{}^T\mathbf{u}_0\mathbf{h}_1$. Čas potřebný k utlumení pohybu pak bude dán poměrem těchto dvou čísel a místo středního konstantního útlumu η_1 pišme hodnotu ${}^T\mathbf{u}_0\mathbf{h}_1\ /\ {}^T\mathbf{u}_0\mathbf{M}\mathbf{u}_0 / 2\Omega_1 \rightarrow \infty$.

```
Velikosti konst. útlumu η
     → ∞            0,00433
```

Zkosení vlastních tvarů od neproporcionálních třecích sil, tj. imaginární části vlastních tvarů kmitu, se spočítají z části pohybové rovnice pro řešení v imaginární rovině

$$[\,\mathbf{K} - \Omega_j^2\,\mathbf{M}\,]\,\mathbf{z}_j = [\,2\eta_j\,\Omega_j\,\mathbf{M}\mathbf{v}_j - \mathbf{h}_j\,] \quad . \qquad (\text{viz str.21}) \qquad \{71\}$$

Na levé straně rovnice je vždy singulární matice, proto jednu hodnotu z každého hledaného vektoru $\mathbf{z}_j$ nutno zvolit a druhou spočítat. Udělá se to podobně jako na str. 28 (viz PŘÍKLAD 2:) vyškrtnutím prvního řádku a sloupce z matice. Aby vyškrtnutí mohlo být provedeno bezchybně, je třeba k vektoru $\mathbf{h}_j$ přičíst takový násobek vektoru $\mathbf{M}\mathbf{v}_j$, aby v jeho škrtaném řádku na pravé straně rovnice byla nula. Tato podmínka je v tomto příkladě splněna pro první i druhý vlastní tvar bez počítání.

```
Zkosení vlastních tvarů
   -π/1000          +4/3000
```

Porovnání výsledků s předcházejícím příkladem:

I v případě konstantního hysterezního tlumení by asi bylo možné brát do úvahy zrcadlené tvary kmitu patřící jakoby k zrcadleným (konjugovaným) vlastním číslům $i\Omega_j$. Zapišme je spolu s útlumy tak, jako by to byla komplexní čísla a výsledky porovnejme :

```
Útlumy a vlastní frekvence η +iΩ
     → ∞            0,00433          0,00433
      0            -√(400/3)        +√(400/3)

Vlastní tvary a zkosení Re+iIm
      1              1                1
      0              0                0

      1            -1/3             -1/3
   -π/1000         -4/3000          +4/3000
```

Chybí v nich druhý mód z řešení systému s viskózním tlumením, mód, který je párový s volným natočením a který „vyšumí“ bez zakmitání do nuly. Ten ale, protože působí tření, nastat ani nemůže.
Ostatní modální charakteristiky dost dobře souhlasí, a to včetně znaménka u čísla útlumu, které i v tomto případě je kladné, když jde o systém tlumený, stabilní.

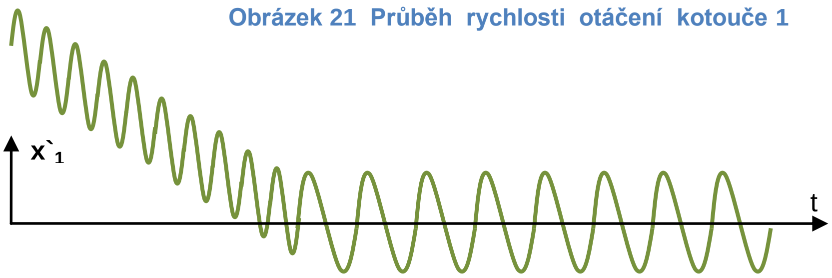
Podle očekávání se tlumený kotouč 2 fázově opožďuje za kotoučem 1, na který tlumící síly přímo nepůsobí. Zkosení jsou významem stejná, jako imaginární části módů v případě tlumení viskózního, ale zde na rozdíl od něho neubývají, protože neubývají amplitudy třecích sil. Velikost útlumu odpovídá směrnici tečny exponenciely viskózního útlumu.
Na tomto jednoduchém příkladu je dobře vidět, že proporcionální část vektoru pravých stran rovnice { 71 } způsobí jenom celkové posunutí zkosení. Proporcionální část by mohla být odečtena, kdyby to bylo zapotřebí. Rozdíly čísel a tudíž ani amplituda části brzdného momentu přenášeného hřídelí $\mathbf{K}_{12}\,\mathbf{z}_j$ by se odečtením nezměnily[23].

Jenže: V tomto řešeném příkladu je poměr $\Omega_2 / \Omega_1 \rightarrow \infty$. Lze odhadnout, co by nastalo, kdyby tento dvouhmotový systém byl modelem pohonu setrvačníku s elektromotorem a brzdou, který by po vypnutí motoru měl být zabrzděn z provozních otáček na nulové.

V první fázi by amplituda rychlosti prvního tvaru kmitu (celkové rotace) zcela překrývala amplitudy rychlosti druhého tvaru kmitu a rychlost na brzdě by vůbec neměnila znaménko.
Druhý tvar kmitu by tudíž nebyl tlumený až do „chvíle“, kdy by ke změně znaménka rychlosti poprvé došlo. Teprve tato „chvíle“ by svými útlumy odpovídala výsledkům modální analýzy, přitom výraz „odpovídala by“ je třeba chápat v průměru časového úseku aspoň doby jedné periody. Je jasné, že v tomto konkrétním příkladě může dojít k několikerému zastavení a opětnému rozběhnutí kotouče 2 oběma směry.

Pak by došlo ke konečnému zastavení brzděného kotouče 2 a systém by změnil strukturu už natrvalo. Kmital by už jen kotouč 1, ale na celé délce hřídele (tedy s frekvencí $\Omega = 10$ rad/s) a opět bez tlumení. Amplituda kmitů kotouče 1 by závisela na tom, v jaké fázi jeho kmitu se kotouč 2 naposledy zastavil, Pokud by její velikost byla k něčemu dobrá, musela by být užita metoda „sešívání“.

Obrázek 21 Průběh rychlosti otáčení kotouče 1



Z rozboru plyne:
Spočítané útlumy mohou být na čas potlačeny, jsou-li amplitudy jeho vlastního tvaru vzhledem k jinému, dominantnímu, výrazně menší a je-li poměr jejich vlastních frekvencí nebo poměr vlastní frekvence vůči rozdílové hodně velký.
S tímto jevem se lze setkat v laboratoři. Řízené mechanické systémy se chovají jinak za stálé rotace a jinak v případě, že se směr otáčení mění.

Stojí za zmínku, že zatímco u viskózně neproporcionálně tlumené soustavy bylo k řešení modální analýzy použito iteračních metod v komplexní aritmetice s maticemi rozměru (4×4) (bez počítače by řešení asi bylo obtížné, vedlo by na Cardanovy vzorce),
na řešení obdobného systému tlumeného čistou konstantní hysterezí stačila reálná aritmetika a poloviční rozměr matic (2×2). Výpočty byly provedeny na kalkulačce a mnozí by je zvládli i bez ní.
Totéž platí i u větších systémů. Modální analýza systémů tlumených hysterezně je méně pracná, jenže s výjimkou čisté lineární hystereze platí jen pro omezenou dobu.

[23]) V tomto jednoduchém příkladě je matice tuhosti prvku $\mathbf{K}_{12}$ totožná s hypermaticí tuhosti $\mathbf{K}$.